Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение средняя общеобразовательная школа №9

Комплексные числа

исследовательский проект

Исполнитель:
обучающаяся 11А класса
Шляхова Полина Витальевна
Руководитель:
учитель математики
Жаворонкова Александра Андреевна

Нижний Тагил
2023

Содержание

Введение

При изучении квадратных уравнений школьники узнают об определённой закономерности: если дискриминант положительный, то данное уравнение имеет два корня, если дискриминант равен нулю, то существует один корень, если дискриминант отрицательный, то уравнение не имеет действительных корней.

На протяжении изучения курса алгебры нам было интересно, почему же при отрицательном дискриминанте уравнение нельзя решить. Мы подумали, что было бы интересно и познавательно углубиться в эту тему и понять причину отсутствия решения при определённом условии. Немного изучив данную тему, мы узнали о комплексных числах – числах, которые не входят во множество действительных, и о том, что с их помощью можно решить квадратное уравнение, даже если оно имеет отрицательный дискриминант. Мы заинтересовались комплексными числами и решили изучить их.

Актуальность проекта заключается в том, что данная тема не только имеет большое значение в современной науке, но и входит в программу обучения большинства ВУЗов, в том числе и без технической направленности. Но в школьной программе эта тема не проходится, поэтому школьники не знают о комплексных числах.

В этом и состоит **проблема исследования:** знания школьников о числовых множествах ограничиваются действительными числами, а это влияет как на решение конкретных задач, так и на уровень кругозора в целом.

Объект исследования: комплексные числа.

Предмет исследования: их свойства, возможные операции, отличия от действительных чисел и применение.

Методы исследования: анализ, синтез, обобщение, сравнение, анкетирование.

Цель проекта: изучить, что такое комплексные числа, чем они отличаются от действительных и как могут быть использованы.

Задачи:

1. Изучить историю возникновения комплексных чисел.
2. Выяснить как определяется комплексное число.
3. Изучить какие действия можно совершать над комплексными числами.
4. Выявить алгоритмы решения уравнений и неравенств, в которых содержатся комплексные числа.
5. Разработать раздаточный материал для решения уравнений и неравенств, в которых содержатся комплексные числа.

I. Теоретическая часть

1.1 История возникновения комплексных чисел

Процесс расширения понятия числа от натуральных к действительным был связан как с потребностями практики, так и с нуждами самой математики. Сначала для счёта предметов использовались натуральные числа. Затем необходимость выполнения деления привела к понятию дробных положительных чисел; далее, необходимость выполнения вычитания – к понятиям нуля и отрицательных чисел; наконец, необходимость извлечения корней из положительных чисел – к понятию иррациональных чисел. Все перечисленные операции выполнимы на множестве действительных чисел. Однако остались и невыполнимые на этом множестве операции, например извлечение квадратного корня из отрицательного числа. Значит, имеется потребность в дальнейшем расширении понятия числа в появлении новых чисел, отличных от действительных. При расширении некоторого числового множества А до множества В соблюдаются 4 условия:

1. Множество А является подмножеством В, т.е. А ⊂ В.
2. Все операции, которые выполняются в множестве А, определяются и в множестве В.
3. В множестве В выполнима операция, которая была невыполнима в множестве А. Именно в этом условии заключена основная цель расширения множества.
4. Множество В должно быть «минимальным» расширением множества А. То есть любое множество, удовлетворяющее условиям 1 – 3, должно включать в себя множество В.

В XVI веке при изучении кубических уравнений оказалось необходимым извлекать квадратные корни из отрицательных чисел. Итальянский учёный Дж. Кардано вывел формулу корней кубического уравнения $x^3 + px + q = 0$: $x = u + v$, где $u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$, $v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$, $uv = -\frac{p}{3}$.

При решении кубических уравнений, дискриминант $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ которых отрицательный, получался парадоксальный результат: корни уравнения – действительные числа, а при вычислении значений u и v необходимо находить корни из отрицательных чисел.

Чтобы объяснить получившийся парадокс, Кардано предложил ввести числа новой природы. Он называл такие величины «число отрицательными» и даже «софистически отрицательными», считал их бесполезными и стремился не применять их. В самом деле, с помощью таких чисел нельзя выразить ни результат измерения какой-нибудь величины, ни изменение этой величины. Дальнейшее развитие математики «узаконило» такие числа. В 1768 году Эйлер писал в своем учебнике алгебры, что так как квадратный корень из отрицательного числа не может быть числом ни положительным, ни отрицательным, ни нулем, то он не может быть причислен к возможным числам. Значит, это число нового класса чисел, причем на числовой прямой ему уже места нет. Вопросы, возникающие в связи с необходимостью решать квадратные уравнения при $b^2 - 4ac < 0$ и кубические уравнения с использованием формул Кардана, требовали расширения понятия числа за счет введения новых чисел и правил действий с ними, причем, по возможности, с сохранением старых свойств. Впервые вплотную подошел к определению новых чисел итальянский математик и инженер Рафаэль Бомбелли в своей книге «Алгебра», предлагая действовать с корнями из отрицательных чисел по тем же правилам, что и с действительными числами. Эти числа позднее в работах немецкого математика Карла Гаусса в 1831 году получили название «комплексных» (в переводе с латинского «составные»). Как уже отмечалось, на числовой прямой все места уже заняты рациональными и иррациональными числами, и новым числам там места нет. Первым геометрическую интерпретацию комплексных чисел ввёл в 1806 году швейцарский математик Жан Роберт Арган, модуль комплексного числа появился в его работах в 1814-1815 гг. На основе комплексных чисел были решены многие задачи теории упругости, аэро- и гидродинамики, квантовой теории поля.

1.2 Определение комплексного числа. Алгебраическая форма комплексных чисел.

Определение. Комплексное число z называется число вида $z = a + bi$, где $a, b \in R$, i называется мнимая единица, определяемая равенством $i^2 = -1$ или $i = \sqrt{-1}$. Форма записи $z = a + bi$ называется алгебраической формой комплексного числа.

Определение. Число a называется действительной частью комплексного числа z и обозначается $a = Re(z)$; число b называется мнимой частью z и обозначается $b = \mathrm{Im}(z)$.

Если $a = 0$, то число $z = bi$ называется чисто мнимым.

Если $b = 0$, то $z = a$ – действительное число.

Определение. Два комплексных числа называются равными, если равны их действительные и мнимые части соответственно.

Арифметические действия над комплексными числами определяются следующими равенствами:

1. $(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
2. $(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$
3. $(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i$
4. $\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i, \ (z_2 \neq 0)$

1.3 Извлечение квадратных корней из отрицательных чисел

$$i^2 = -1$$

$$(-i)^2 = (-1 \cdot i)^2 = (-1)^2 \cdot i^2 = -1$$

Таким образом, существует, по крайней мере, два числа, квадраты которых равны -1, а именно i и $-i$.

Пусть квадрат комплексного числа $a + bi$ равен -1. Тогда

$$(a + bi)^2 = -1$$

$$a^2 + 2abi - b^2 = -1$$

Так как два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные части и коэффициенты мнимых частей, то

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -1 \\ ab = 0 \end{cases}$$

Из второго уравнения полученной системы следует, что хотя бы одно из чисел a и b должно равняться нулю. Если $b = 0$, то из первого уравнения получается $a^2 = -1$. Число a действительное, и поэтому $a^2 \geq 0$. Неотрицательное число a^2 не может равняться отрицательному числу -1. Поэтому равенство $b = 0$ в данном случае невозможно. Следовательно, $a = 0$, но тогда из первого уравнения системы получаем $-b^2 = -1, \quad b = \pm 1$.

Значит, комплексными числами, квадраты которых равны -1, являются только числа i и $-i$.

В множестве комплексных чисел выполняется операция извлечение корня чётной степени из отрицательного числа, которая была невыполнима в множестве действительных чисел (то есть разрешимо квадратное уравнение с отрицательным дискриминантом).

1.4 Модуль комплексного числа. Сопряженные комплексные числа

Определение. Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется неотрицательное число $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, т. е. $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Определение. Числа $z = a - bi$ и $\bar{z} = a + bi$, отличающиеся только знаком при мнимой части, называются взаимно сопряженными.

Свойства взаимно сопряженных комплексных чисел и модулей:

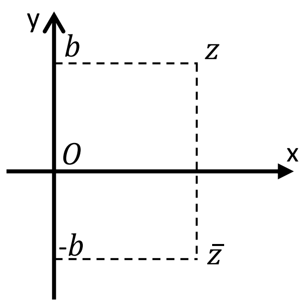
1. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
2. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$
3. $|z^n| = |z|^n$
4. $\overline{(\bar{z})} = z$
5. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
6. $|z| = |\bar{z}|$
7. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}$, $z_2 \neq 0$
8. $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \overline{z_2}$
9. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
10. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, $z_2 \neq 0$
11. $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$

1.5 Геометрическая форма комплексных чисел

Определение. Плоскость, на которой изображаются в виде точек комплексные числа, называется комплексной плоскостью. Все действительные числа изображаются точками оси абсцисс, которая называется действительной осью, а все чисто мнимые числа изображаются точками оси ординат, которая называется мнимой осью.

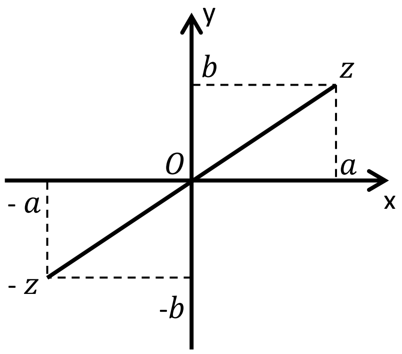
Свойства геометрической формы комплексных чисел:

1. $|\overrightarrow{Oz}| = |z|$. $|\overrightarrow{Oz}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ по теореме Пифагора и $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
2. z и $\bar{z}$ симметричны относительно оси Ox. $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$.



3. z и $\bar{z}$ центрально-симметричны относительно точки $O(0;0)$.

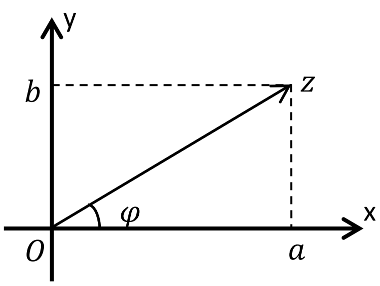
   $z = a + bi$ и $-z = -a - bi$.



4. Сложение комплексных чисел в векторной форме подчиняется правилу параллелограмма (аналогично правилу сложения двух векторов).
5. $|\overrightarrow{z_1 z_2}| = |z_2 - z_1|$ – расстояние между точками z_2 и z_1.
6. Рассмотрим множество всех точек плоскости, для которых $|z| = R$ $(R > 0)$. Так как $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = R$, то $x^2 + y^2 = R^2$. Значит, все комплексные числа, для которых $|z| = R$, находятся на окружности с центром $(0;0)$ и радиусом R.

1.6 Тригонометрическая форма комплексных чисел

Известно, что точку плоскости можно задать радиус-вектором, т. е. длиной вектора и направлением вектора: $|\overrightarrow{Oz}| = |z|$; φ – угол между вектором $\overrightarrow{Oz}$ и положительным направлением оси Ox, отсчитываемый против часовой стрелки, называется главным, если $0 \le \varphi < 2\pi$. Главный угол φ называется аргументом комплексного числа и обозначается $\varphi = \arg z$. Множество всех значений аргумента комплексного числа обозначается Arg z: $\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2\pi k, k \in Z$.



Таким образом, для комплексного числа $z = (a; b)$ $(z \neq 0)$ имеем

$z = a + bi$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = |z| \cos\varphi \\ b = |z| \sin\varphi \end{cases}$$

$z = \cos\varphi |z| + \sin\varphi |z| i = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi)$

$z = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ – тригонометрическая форма комплексного числа

II. Практическая часть

2.1 Применение комплексных чисел в решении уравнений, неравенств и систем уравнений

Решение квадратных уравнений с помощью комплексных чисел

Алгоритм решения квадратных уравнений с помощью комплексных чисел:

1. Найти дискриминант $D = b^2 - 4ac$
2. Найти корни уравнения $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. Если $D < 0,\ D \in R$, то $\sqrt{D} = \sqrt{-D}i$

Примеры:

1) $x^2 + 4x + 5 = 0$
   1. $D = b^2 - 4ac$
      $D = 16 - 20 = -4$
   2. $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
      $$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-(-4)}\,i}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}i}{2} = -2 \pm i$$
   Ответ: $-2 \pm i$
2) $x^2 - 3x + 4 = 0$
   1. $D = 9 - 16 = -7$
   2. $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{7}\,i}{2}$

   Ответ: $\frac{3 \pm \sqrt{7}\,i}{2}$

Решение уравнений с комплексными числами

Алгоритм решения уравнений с комплексными числами:

1. Расписать комплексные числа $z = a + bi$
2. Привести уравнение к виду $a + bi = 0$
3. Записать систему уравнений $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$, так как равенство $a + bi = 0$ будет верным только тогда, когда $a = 0$ и $b = 0$
4. Решить систему уравнений
5. Найти корни уравнения, подставив найденные корни системы уравнений в алгебраическую форму комплексных чисел $z = a + bi$

Примеры:

1) $z^2 + 2\overline{z} + 1 = 0$
   1. $(x + yi^{)2} + 2(x - yi) + 1 = 0$
   2. $x^2 + 2xyi + y^2i^2 + 2x - 2yi + 1 = 0$
      $x^2 + 2xyi - y^2 + 2x - 2yi + 1 = 0$
      $(x^2 - y^2 + 2x + 1) + (2xyi - 2yi) = 0$
      $(x^2 - y^2 + 2x + 1) + 2(xy - y)i = 0$
   3. $\begin{cases} x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0 \\ \quad 2(xy - y) = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2+2x+1-y^2=0 \\ (xy-y)=0 \end{cases}$

$\begin{cases} (x+1)^2-y^2=0 \\ y(x-1)=0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} (x+1)^2-y^2=0 \\ y=0 \end{cases}$

$\begin{cases} (x+1)^2=0 \\ y=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x+1=0 \\ y=0 \end{cases}$

$\begin{cases} X=-1 \\ y=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x+1)^2-y^2=0 \\ x-1=0 \end{cases}$

$\begin{cases} (x+1)^2-y^2=0 \\ x=1 \end{cases}$

$\begin{cases} y^2=4 \\ x=1 \end{cases}$

$\begin{cases} y=\pm 2 \\ x=1 \end{cases}$

5. $z=-1$

$z=1+2i$

$z=1-2i$

Ответ: $-1; 1\pm 2i$

2) $z^2-2(z+\bar{z})+4=0$

1. $(x+yi^{)2}-2(x+yi+x-yi)+4=0$
2. $x^2+2xyi+y^2i^2-4x+4=0$

$x^2+2xyi-y^2-4x+4=0$

$(x^2-y^2-4x+4)+2xyi=0$

3. $\begin{cases} x^2-y^2-4x+4=0 \\ 2xy=0 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x^2-y^2-4x+4=0 \\ xy=0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x^2-y^2-4x+4=0 \\ x=0 \end{cases}$

$\begin{cases} 4-y^2=0 \\ x=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y^2=4 \\ x=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y=\pm 2 \\ x=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2-y^2-4x+4=0 \\ y=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2-4x+4=0 \\ y=0 \end{cases}$

$\begin{cases} (x-2)^2=0 \\ y=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \\ \mathrm{y} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ \mathrm{y} = 0 \end{cases}$$

5. $\mathrm{z} = 2\mathrm{i}$

   $\mathrm{z} = -2\mathrm{i}$

   $\mathrm{z} = 2$

Ответ: $2\mathrm{i};\ -2\mathrm{i};\ 2$

Решение систем уравнений с комплексными числами

Алгоритм решения систем уравнений:

1. Преобразовать систему уравнений в уравнение с одним неизвестным.
2. Решить получившееся уравнение
3. По найденным корням найти остальные неизвестные

Примеры:

1) $\begin{cases} (1+\mathrm{i})\mathrm{y} + 0{,}5(1-\mathrm{i})\mathrm{x} = 0{,}5(-1+\mathrm{i}) \\ (2-2\mathrm{i})\mathrm{y} + 2\mathrm{x} = 4 \end{cases}$

1. $\begin{cases} 2(1+\mathrm{i})\mathrm{y} + (1-\mathrm{i})\mathrm{x} = -(1-\mathrm{i}) \\ 2(1+\mathrm{i})\mathrm{y} + 2\mathrm{x} = 4 \end{cases}$

   $\begin{cases} 2(1-\mathrm{i}^2)\mathrm{y} + (1-\mathrm{i})^2\mathrm{x} = -(1-\mathrm{i})^2 \\ 2(1-\mathrm{i}^2)\mathrm{y} + 2(1+\mathrm{i})\mathrm{x} = 4(1+\mathrm{i}) \end{cases}$

   $1 - \mathrm{i}^2 = 1 + 1 = 2$

   $(1-\mathrm{i})^2 = 1 - 2\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 = 1 - 2\dot{\mathrm{I}} - 1 = -2\mathrm{i}$

   $\begin{cases} 4\mathrm{y} - 2\mathrm{ix} = 2\mathrm{i} \\ 4\mathrm{y} + 2(1+\mathrm{i})\mathrm{x} = 4(1+\mathrm{i}) \end{cases}$

   $\begin{cases} 2\mathrm{y} - \mathrm{ix} = \mathrm{i} \\ 2\mathrm{y} + (1+\mathrm{i})\mathrm{x} = 2(1+\mathrm{i}) \end{cases}$

   $2\mathrm{y} - 2\mathrm{y} - \mathrm{ix} - (1+\mathrm{i})\mathrm{x} = \mathrm{i} - 2(1+\mathrm{i})$

   $-\mathrm{ix} - \mathrm{x} - \mathrm{ix} = \mathrm{i} - 2 - 2\mathrm{i}$

2. $-2\mathrm{ix} - \mathrm{x} = -\mathrm{i} - 2$

   $2\mathrm{ix} + \mathrm{x} = \mathrm{i} + 2$

   $\mathrm{x}(2\mathrm{i} + 1) = \mathrm{i} + 2$

   $\mathrm{x} = \dfrac{\mathrm{i}+2}{2\mathrm{i}+1}$

3. $\frac{\mathrm{i}+2}{2\mathrm{i}+1} = \frac{(\mathrm{i}+2)(2\mathrm{i}-1)}{(2\mathrm{i}+1)(2\mathrm{i}-1)} = \frac{2\mathrm{i}-\mathrm{i}+4\mathrm{i}-2}{4\mathrm{i}^2-1} = \frac{-4+3\mathrm{i}}{-5} = \frac{4-3\mathrm{i}}{5} = 0{,}8 - 0{,}6\mathrm{i}$

   $\begin{cases} \mathrm{x} = 0{,}8 - 0{,}6\mathrm{i} \\ 2\mathrm{y} - \mathrm{i}(0{,}8 - 0{,}6\mathrm{i}) = \mathrm{i} \end{cases}$

   $\begin{cases} \mathrm{x} = 0{,}8 - 0{,}6\mathrm{i} \\ 2\mathrm{y} - 0{,}8\mathrm{i} + 0{,}6\mathrm{i}^2 = \mathrm{i} \end{cases}$

   $\begin{cases} \mathrm{x} = 0{,}8 - 0{,}6\mathrm{i} \\ 2\mathrm{y} = 1{,}8\mathrm{i} - 0{,}6\mathrm{i}^2 \end{cases}$

   $\begin{cases} \mathrm{x} = 0{,}8 - 0{,}6\mathrm{i} \\ \mathrm{y} = 0{,}3 + 0{,}9\mathrm{i} \end{cases}$

Ответ: $(0{,}8 - 0{,}6\mathrm{i};\ 0{,}3 + 0{,}9\mathrm{i})$

2) $\begin{cases} \mathrm{i}x - 2y = -\mathrm{i} \\ (1+\mathrm{i})x - 2\mathrm{i}y = 3 + \mathrm{i} \end{cases}$

1. $\begin{cases} \mathrm{i}^2x - 2y\mathrm{i} = -\mathrm{i} \\ (1+\mathrm{i})x - 2\mathrm{i}y = 3 + \mathrm{i} \end{cases}$

   $\begin{cases} -x - 2y\mathrm{i} = 1 \\ (1+\mathrm{i})x - 2\mathrm{i}y = 3 + \mathrm{i} \end{cases}$

   $-x - (1+\mathrm{i})x - 2y\mathrm{i} + 2\mathrm{i}y = 1 - (3 + \mathrm{i})$

   $-x - x - x\mathrm{i} = 1 - 3 - \mathrm{i}$

2. $-2x - x\mathrm{i} = -2 - \mathrm{i}$

   $2x + x\mathrm{i} = 2 + \mathrm{i}$

   $x(2 + \mathrm{i}) = 2 + \mathrm{i}$

   $x = 1$

3. $\begin{cases} \mathrm{i} - 2y = -\mathrm{i} \\ x = 1 \end{cases}$

   $\begin{cases} -2y = -2\mathrm{i} \\ x = 1 \end{cases}$

   $\begin{cases} y = \mathrm{i} \\ x = 1 \end{cases}$

Ответ: $(1;\ \mathrm{i})$

Решение неравенств с комплексными числами

Алгоритм решения неравенств с комплексными числами:

1. Преобразовать данное неравенство в неравенство вида $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$
2. Начертить окружность с радиусом r и с центром $O(x_0; y_0)$
   Если знак в неравенстве $>$, то неравенству удовлетворяют все точки плоскости вне окружности.
   Если знак в неравенстве $\geq$, то неравенству удовлетворяют все точки плоскости вне окружности, включая границу.
   Если знак в неравенстве $<$, то неравенству удовлетворяют все точки в окружности.
   Если знак в неравенстве $\leq$, то неравенству удовлетворяют все точки в окружности, исключая границу

Примеры:

1) $|z\mathrm{i} - 3\mathrm{i} + 4| \leq |\mathrm{i}|$
   1. $z = x + y\mathrm{i}$

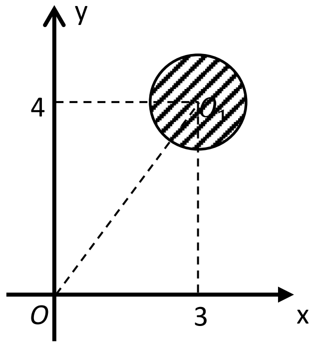
      $|(x + y\mathrm{i})\mathrm{i} - 3\mathrm{i} + 4| \leq |\mathrm{i}|$

      $|x\mathrm{i} + y\mathrm{i}^2 - 3\mathrm{i} + 4| \leq |\mathrm{i}|$

      $|4 - y + (x - 3)\mathrm{i}| \leq |\mathrm{i}|$

      $\sqrt{(4 - y)^2 + (x - 3)^2} \leq \sqrt{1^2}$
   2. $(y - 4)^2 + (x - 3)^2 \leq 1$

   Геометрически – это окружность радиуса $\mathrm{R} = 1$ и с центром $\mathrm{O}_1(3; 4)$



2) $\frac{|z+1|}{|z-2|} \geq 0{,}5$

1. $\mathrm{z = x + yi}$

   $|x + yi + 1| \geq |x + yi - 2| \cdot \dfrac{1}{2}; (z \neq 2)$

   $|(x + 1) + yi| \geq \dfrac{1}{2}|(x - 2) + yi|$

   $2|(x + 1) + yi| \geq |(x - 2) + yi|$

   $4((x + 1)^2 + y^2) \geq (x - 2)^2 + y^2$

   $4((x + 1)^2 + y^2) - (x - 2)^2 + y^2 \geq 0$

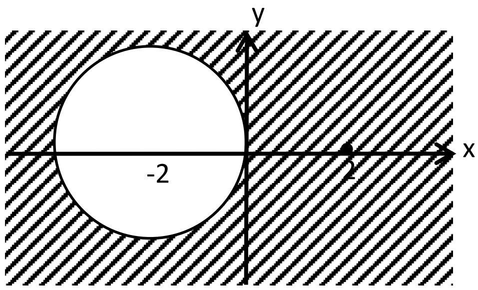
   $3x^2 + 12x + 3y^2 \geq 0$

   $x^2 + 4x + y^2 \geq 0$

   $x^2 + 4x + 4 + y^2 \geq 4$

2. $(x + 2)^2 + y^2 \geq 2^2$

   Этому неравенству удовлетворяют все точки комплексной плоскости вне окружности с центром $O(-2; 0)$ и радиусом $R = 2$, включая границу и исключая точку $z = 2$, т.е. $(2; 0)$



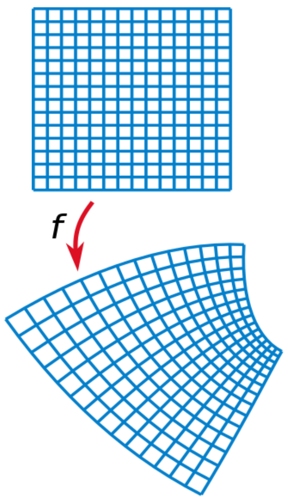
2.2 Применение комплексных чисел в учебных дисциплинах

1. Физика.

   Комплексные числа стали неотъемлемой частью большинства разделов физики. Главная особенность использования комплексных чисел заключается в лёгком решении задач, которые не решаются в рамках математики вещественных чисел. Кроме того, комплексные числа позволяют упрощать расчеты в задачах, которые связаны с теплопроводностью, гидродинамикой и магнитными полями. Также, комплексные числа используются в конструировании самолётов и ракет, в квантовой механике и в теориях относительности, упругости и колебаний.

2. Картография.

   Конформное отображение – непрерывное отображение, сохраняющее углы между кривыми, а значит и форму бесконечно малых фигур. Этот процесс применяется в картографии.



3. Экономика.

   У товара есть две важные составляющие: потребительские свойства и цена. Оба фактора являются необходимыми показателями свойств товара, поэтому возникает потребность разработки комплексного показателя. Именно таким показателем является комплексное число, состоящее из действительной и мнимой части.

   Представив какую-либо оценку потребительских свойств товара П как действительную часть комплексного числа, а его цену Ц - как мнимую часть, получим:

   Т = П + iЦ, где i - мнимая единица, которая удовлетворяет соотношению: $i^2 = -1$

Легко убедиться в том, что данная запись позволяет полностью описать свойства конкретного товара и математически корректно работать как с каждой из двух его составляющих, так и с их совокупностью в целом.

4. Компьютерная индустрия

Комплексные числа встречаются в информатике и инженерии, а также в научных вычислениях. Примеры включают быстрые преобразования для обработки сигналов, моделирование схем и фракталы, которые используются в графике и других областях. Они также часто встречаются в физическом программировании, поскольку комплексные числа имеют очень интересные отношения к векторам и тригонометрии.

В информатике важную роль играют данные. Данные невозможно увидеть визуально, поскольку они представлены в виде файлов CSV. Эти данные CSV-файла можно увидеть, используя методы визуального представления в информатике. Это визуальное представление находится только на действительной оси и мнимой оси, поэтому комплексные числа используются для представления данных в визуальном формате для компьютерных технологий. В 2D-изображениях мы также можем использовать комплексные числа. Вращение точки, имеющей действительную часть и мнимую часть, и перевод точки в 2D-изображение представляют комплексное число.

5. Машиностроение и строительство.

В машиностроении и строительстве проектирование является основным для автомобилей и зданий. Необходимо использовать концепции 2D-проектирования, которые в основном зависят только от комплексных чисел. Вращения также используются при рисовании, поскольку точка представлена только комплексным числом.

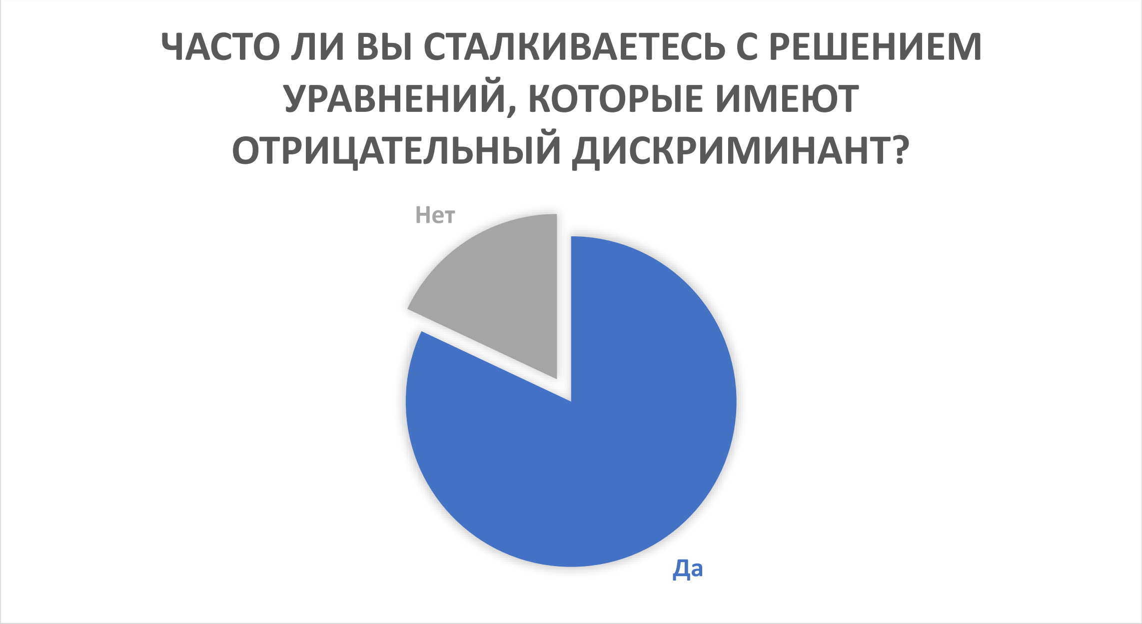
6. Электротехника.

В электротехнике комплексные числа нашли себя в качестве удобной замены дифференциальным уравнениям, которые неизбежно возникают при решении задач с линейными цепями переменного тока. Для этого величины заменяются комплексными числами, где действительная часть равна активной составляющей величины, мнимая - реактивной. Расчет, таким образом, сильно упрощается.

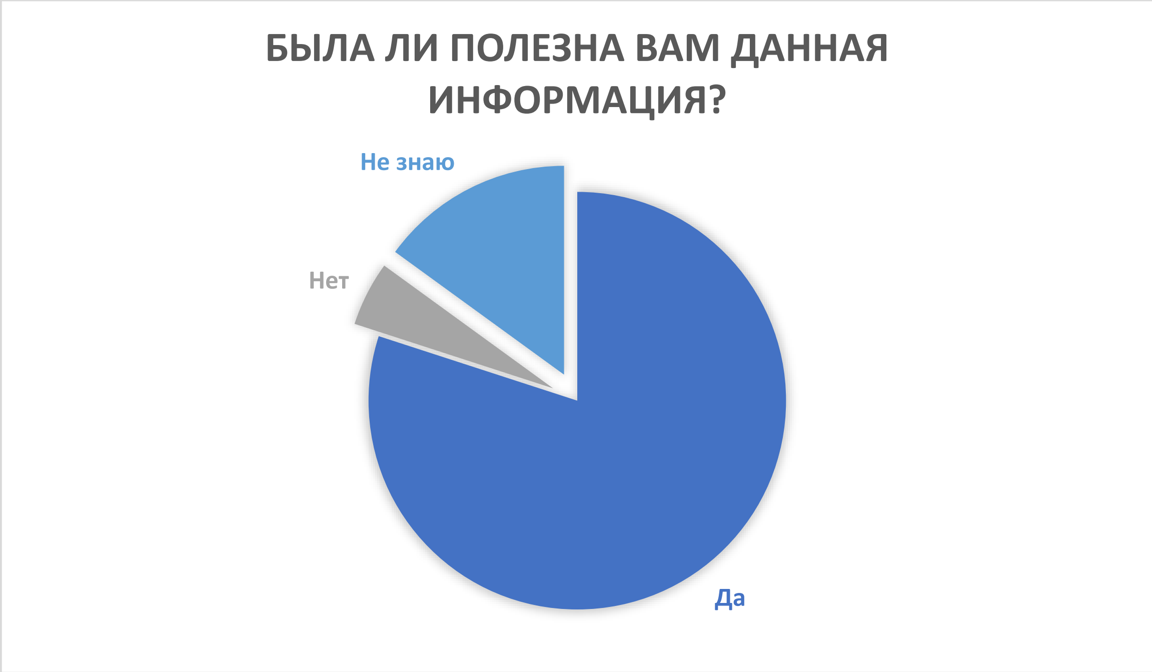
2.3 Социальный опрос учеников 10 класса

Мы провели опрос среди учеников 10 класса, чтобы выявить актуальность темы проекта.

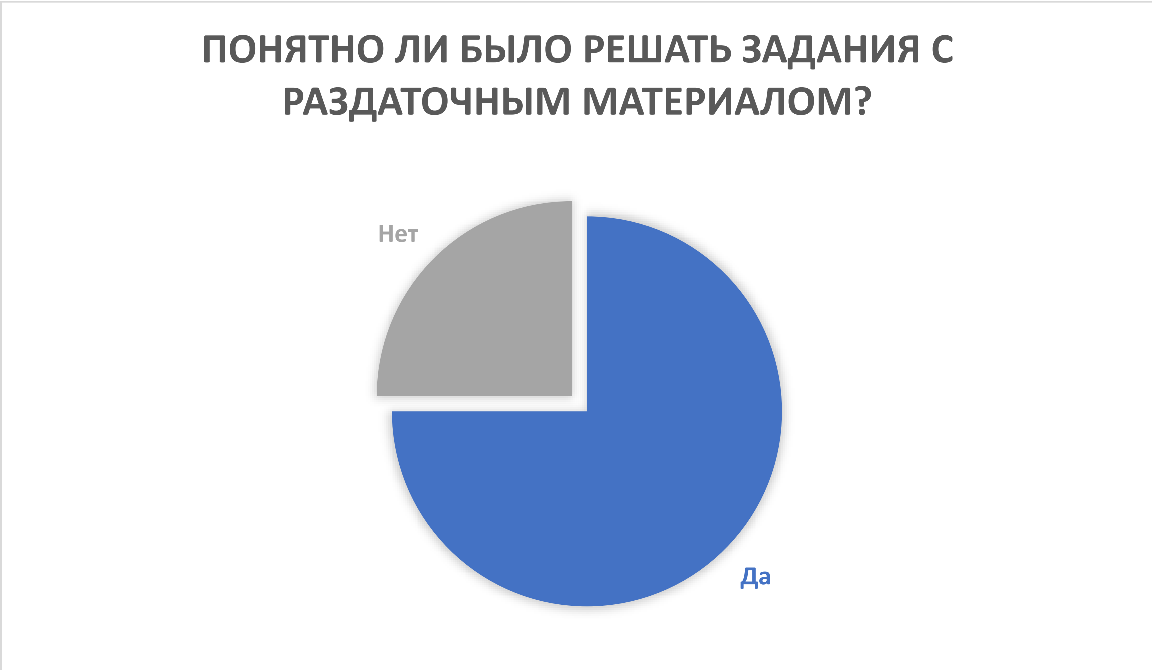
Выяснилось, что большая часть класса при решении уравнений часто сталкивается с отрицательным дискриминантом. Однако о комплексных числах мало кто слышал.



На уроке математики в 10 классе нами был проведён урок-лекция на тему «Комплексные числа». По итогу урока были заданы некоторые вопросы, по результатам которых, сделаны определенные выводы.



Для решения заданий был предоставлен раздаточный материал, который позволяет решать уравнения, неравенства и системы уравнений.



Заключение

В заключение нашей работы мы бы хотели рассказать о том, что мы сделали в ходе выполнения своего проекта. Безусловно, главной целью нашей проектной работы было исследование на тему комплексные числа.

Наш проект дал нам много знаний о том, что комплексные числа, несмотря на их «лживость» и недействительность, имеют очень широкое применение. Они играют значимую роль не только в математике, а также и в таких науках, как физика, экономика. В настоящее время активно используются в электротехнике и компьютерной индустрии.

Работа над проектом вызвала у нас ещё больший интерес к глубокому изучению математики, поскольку в базовую школьную программу комплексные числа не входят, но тем не менее, являются серьезным разделом элементарной математики.

Изучив историю возникновения комплексных чисел, мы выяснили, что процесс расширения понятия числа от натуральных к действительным был связан как с потребностями практики, так и с нуждами самой математики. Появление комплексных чисел было необходимым для извлечения квадратного корня из отрицательного числа. Также, мы изучили, что такое комплексные числа, какие действия можно совершать с ними и как их использовать.

Хотелось бы отметить, что с результатами данной проектной работы ознакомились ребята 10 класса. Они наглядно увидели, разработанный раздаточный материал для решения уравнений, неравенств и систем уравнений с комплексными числами.

Мы считаем, что тема моего проекта раскрыта, цель достигнута, задачи выполнены.

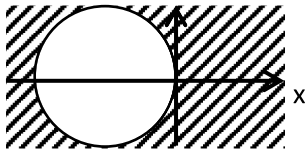
Надеемся, что сведения и выводы из моей проектной работы будут полезны другим любителям математики. Они смогут, познакомиться с историей, определением и примерами решений задач с комплексными числами.

Список использованных источников

1. Колягин Ю. М. Ткачева М. В., Федорова Н. Е., Шабунин М. И.; Алгебра и начала математического анализа. 11 класс; Издательство "Просвещение", 2010
2. Глазков Ю. А., Варшавский И. К., Гаиашвили М. Я.; Комплексные числа. 9—11 классы; Издательство «Экзамен», 2012
3. Канунников А.; Алгебра и геометрия комплексных чисел [Статья]; 2017
4. Жмурова И. Ю. Баринова С. В.; Изучение комплексных чисел в общеобразовательной школе [Статья]; 2020
5. Деменева Н. В.; Комплексные числа [Учебное пособие]; 2017
6. Курош А. Г.; Курс высшей алгебры; Издательство «Лань», 2013
7. Пантелеев А. В., Якимова А. С.; Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах; Издательство «Лань», 2015
8. Шахмейстер А.Х., Комплексные числа, 2014.
9. Гредасова Н.В., Желонкина Н.И., Корешникова М.А., Корчемкина Л.В., Зенков В.И.; Теория функций комплексного переменного [Учебное пособие]; Издательство Уральского университета, 2018
10. https://ru.wikipedia.org/wiki/
11. https://elementy.ru/posters/fractals/complex_numbers
12. https://zaochnik.com/spravochnik/matematika/korni/kompleksnye-chisla/
13. https://univerlib.com/mathematical_analysis/indefinite_integral/complex_numbers/
14. http://www.mathprofi.ru/
15. https://infourok.ru/lekciya-po-matematike-temakompleksnie-chisla-i-deystviya-s-nimi
16. https://resh.edu.ru/subject/lesson/4115/conspect/149104/
17. https://nsportal.ru/shkola/matematika/library/2017/04/11/lektsiya-kompleksnye-chisla
18. https://studwork.org/spravochnik/matematika/kompleksnye-chisla/kompleksnye-chisla

Приложение

Решение квадратных уравнений с помощью комплексных чисел	**Решение уравнений с комплексными числами**	**Решение систем уравнений с комплексными числами**	**Решение неравенств с комплексными числами**
Алгоритм решения: 1. Найти дискриминант $D = b^2 - 4ac$ 2. Найти корни уравнения $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. Если $D < 0$, то $\sqrt{D} = \sqrt{-D}i$	Алгоритм решения: 1. Расписать комплексные числа $z = a + bi$ 2. Привести уравнение к виду $a + bi = 0$ 3. Записать систему уравнений $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$, так как равенство $a + bi = 0$ будет верным только тогда, когда $a = 0$ и $b = 0$ 4. Решить систему уравнений 5. Найти корни уравнения, подставив найденные корни системы уравнений в алгебраическую форму комплексных чисел $z = a + bi$	Алгоритм решения: 1. Преобразовать систему уравнений в уравнение с одним неизвестным. 2. Решить получившееся уравнение 3. По найденным корням найти остальные неизвестные	Алгоритм решения: 1. Преобразовать данное неравенство в неравенство вида $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ 2. Начертить окружность с радиусом r и с центром $O(x_0; y_0)$ Если знак в неравенстве $>$, то неравенству удовлетворяют все точки плоскости вне окружности. Если знак в неравенстве $\geq$, то неравенству удовлетворяют все точки плоскости вне окружности, включая границу. Если знак в неравенстве $<$, то неравенству удовлетворяют все точки в окружности. Если знак в неравенстве $\leq$, то неравенству удовлетворяют все точки в окружности, исключая границу
Пример: $x^2 - 3x + 4 = 0$ $D = 9 - 16 = -7$ $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{7}\,i}{2}$ Ответ: $\frac{3 \pm \sqrt{7}\,i}{2}$	Пример: $z^2 + 2\bar{z} + 1 = 0$ $(x + yi)^2 + 2(x - yi) + 1 = 0$ $x^2 + 2xyi + y^2 i^2 + 2x - 2yi + 1 = 0$ $x^2 + 2xyi - y^2 + 2x - 2yi + 1 = 0$ $(x^2 - y^2 + 2x + 1) + (2xyi - 2yi) = 0$ $(x^2 - y^2 + 2x + 1) + 2(xy - y)i = 0$ $\begin{cases} x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0 \\ 2(xy - y) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + 2x + 1 - y^2 = 0 \\ (xy - y) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} (x + 1)^2 - y^2 = 0 \\ y(x - 1) = 0 \end{cases}$ 1. $\begin{cases} (x + 1)^2 - y^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} (x + 1)^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$	Пример: $\begin{cases} (1 + i)y + 0{,}5(1 - i)x = 0{,}5(-1 + i) \\ (2 - 2i)y + 2x = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} 2(1 + i)y + (1 - i)x = -(1 - i) \\ 2(1 + i)y + 2x = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} 2(1 - i^2)y + (1 - i)^2 x = -(1 - i)^2 \\ 2(1 - i^2)y + 2(1 + i)x = 4(1 + i) \end{cases}$ $1 - i^2 = 1 + 1 = 2$ $(1 - i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2\dot{I} - 1$ $1 - 2\dot{I} - 1 = -2i$ $\begin{cases} 4y - 2ix = 2i \\ 4y + 2(1 + i)x = 4(1 + i) \end{cases}$ $\begin{cases} 2y - ix = i \\ 2y + (1 + i)x = 2(1 + i) \end{cases}$ $2y - 2y - ix - (1 + i)x = i - 2(1 + i)$ $-ix - x - ix = i - 2 - 2i$ $-2ix - x = -i - 2$ $2ix + x = i + 2$ $x(2i + 1) = i + 2$ $x = \frac{i + 2}{2i + 1}$	Пример: $\frac{\lvert z + 1\rvert}{\lvert z - 2\rvert} \geq 0{,}5$ $z = x + yi$ $\lvert x + yi + 1\rvert \geq \lvert x + yi - 2\rvert \cdot \frac{1}{2}; (z \neq 2)$ $\lvert(x + 1) + yi\rvert \geq \frac{1}{2}\lvert(x - 2) + yi\rvert$ $2\lvert(x + 1) + yi\rvert \geq \lvert(x - 2) + yi\rvert$ $4((x + 1)^2 + y^2) \geq (x - 2)^2 + y^2$ $4((x + 1)^2 + y^2) - (x - 2)^2 + y^2 \geq 0$ $3x^2 + 12x + 3y^2 \geq 0$ $x^2 + 4x + y^2 \geq 0$ $x^2 + 4x + 4 + y^2 \geq 4$ $(x + 2)^2 + y^2 \geq 2^2$ Этому неравенству удовлетворяют все точки комплексной плоскости вне окружности с центром $O(-2; 0)$ и радиусом $R = 2$,

	$\begin{cases} X = -1 \\ y = 0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} (x+1)^2 - y^2 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} (x+1)^2 - y^2 = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} y^2 = 4 \\ x = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} y = \pm 2 \\ x = 1 \end{cases}$ $z = -1$ $z = 1 + 2i$ $z = 1 - 2i$ Ответ: $-1;\ 1 \pm 2i$	$\frac{i+2}{2i+1} = \frac{(i+2)(2i-1)}{(2i+1)(2i-1)} == \frac{2i - i + 4i - 2}{4i^2 - 1} = \frac{-4+3i}{-5} = \frac{4-3i}{5} = 0{,}8 - 0{,}6i$ $\begin{cases} x = 0{,}8 - 0{,}6i \\ 2y - i(0{,}8 - 0{,}6i) = i \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0{,}8 - 0{,}6i \\ 2y - 0{,}8i + 0{,}6i^2 = i \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0{,}8 - 0{,}6i \\ 2y = 1{,}8i - 0{,}6i^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0{,}8 - 0{,}6i \\ y = 0{,}3 + 0{,}9i \end{cases}$ Ответ: $(0{,}8 - 0{,}6i;\ 0{,}3 + 0{,}9i)$	включая границу и исключая точку $z = 2$, т.е. $(2;0)$ 
Задание: $x^2 + 4x + 5 = 0$ $x^2 - 2x + 5 = 0$ $2x^2 + 3x + 7 = 0$	Задание: $z^2 - 2(z + \bar{z}) + 4 = 0$ $z^2 - (5 - i)z + 6 = 0$ $2z^2 - (3 - i)z + 4 - 2i = 0$	Задание: $\begin{cases} ix - 2y = -i \\ (1+i)x - 2iy = 3 + i \end{cases}$ $\begin{cases} (1-i)x - 0{,}5(1+i)y = 0{,}5(-1+i) \\ (-2+2i)x - 2y = -4 \end{cases}$	Задание: $\lvert zi - 3i + 4 \rvert \le \lvert i \rvert$ $\lvert z + 4 - 3i \rvert \le 1$ $\lvert 2z - 3 \rvert \ge 1$